Matematica finanziaria: svolgimento prova di esonero del 15 maggio 2007

1a. Assumendo che il colore dei capelli negli esseri umani sia determinato da una coppia di "alleli", diciamo (B, S), presi a caso con probabilità $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ uno dalla madre e uno dal padre, in maniera tale che *si è biondi se e soltanto se entrambi gli alleli sono* B, e sapendo che:

- sia Bobo che Bubi hanno i capelli scuri;
- le coppie di alleli sono equiprobabili;
- la scelta di un allele da un genitore non influenza[1] la scelta del secondo allele dell'altro genitore;

determinare la probabilità che il figlio di Bobo e Bubi sia biondo.

Svolgimento. Denotiamo con S e B rispettivamente l'allele relativo al capello scuro e l'allele relativo al capello biondo, e con la coppia ordinata $(\cdot, \cdot)$ gli alleli presenti in un individuo (per convenzione, decidiamo che il primo rappresenti l'allele paterno e il secondo l'allele materno).

Le possibili combinazioni di alleli in Bobo e Bubi sono allora $\{(S, S), (S, B), (B, S)\}$ (punto 1) e ciascuna di esse ha probabilità $\frac{1}{3}$ (punto 2). Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}\text{Prob}\{\text{figlio biondo}\} &\overset{\text{dal testo}}{=} \text{Prob}\{\text{allele preso da Bobo} = B \text{ e allele preso da Bubi} = B\} \\ &\overset{\text{punto 3}}{=} \text{Prob}\{\text{allele preso da Bobo} = B\}\text{Prob}\{\text{allele preso da Bubi} = B\}.\end{aligned}$$

Calcoliamo allora $\text{Prob}\{\text{allele preso da Bobo} = B\}$. Se sapessimo quali sono gli alleli di Bobo, sarebbe fatta! Ad esempio, se gli alleli di Bobo fossero (S, B), la probabilità che il figlio di Bobo (Bebe) abbia preso dal padre l'allele B sarebbe $\frac{1}{2}$ (come specificato nel testo). Ma questo è proprio un lavoro da probabilità condizionata: io conosco le probabilità che mi servono *condizionate* alla conoscenza degli alleli di Bobo! Usando la relazione

$$\text{Prob}\{X\} = \text{Prob}\{X|Y_1\}\text{Prob}\{Y_1\} + \cdots + \text{Prob}\{X|Y_n\}\text{Prob}\{Y_n\}$$

valida se $Y_1, \ldots, Y_n$ sono eventi disgiunti ed esaustivi ottengo

$$\begin{aligned}&\text{Prob}\{\text{allele preso da Bobo} = B\} \\ &= \text{Prob}\{\text{allele preso da Bobo} = B|\text{alleli Bobo} = (S, S)\}\text{Prob}\{\text{alleli Bobo} = (S, S)\} \\ &+ \text{Prob}\{\text{allele preso da Bobo} = B|\text{alleli Bobo} = (S, B)\}\text{Prob}\{\text{alleli Bobo} = (S, B)\} \\ &+ \text{Prob}\{\text{allele preso da Bobo} = B|\text{alleli Bobo} = (B, S)\}\text{Prob}\{\text{alleli Bobo} = (B, S)\} \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Quindi la probilità che Bebe abbia preso da Bobo proprio l'allele B è $\frac{1}{3}$, e lo stesso vale per la probilità che Bebe abbia preso da Bubi proprio l'allele B (abbiamo infatti esattamente le stesse informazioni su Bobo e Bubi). Quindi la probabilità cercata è

$$\text{Prob}\{\text{Bebe biondo}\} = \text{Prob}\{\text{allele preso da Bobo} = B\}\text{Prob}\{\text{allele preso da Bubi} = B\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

■

1b. Frugando in soffitta tra ricordi di famiglia, Bobo trova una foto dei suoi genitori, nella quale si vede chiaramente che il suo babbo è biondo! Con questa nuova informazione, determinare la probabilità che il figlio di Bobo e Bubi sia biondo.

Svolgimento. Come nell'esercizio precedente, ma questa volta l'informazione è asimmetrica: il babbo di di Bobo è biondo, quindi le possibili combinazioni di alleli in Bobo sono $\{(B, S)\}$ (il primo allele -quello preso dal babbo- deve essere per forza B!). Abbiamo quindi:

$$\text{Prob}\{\text{Bebe biondo}\} = \text{Prob}\{\text{allele preso da Bobo} = B\}\text{Prob}\{\text{allele preso da Bubi} = B\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

■

2. Vicino alla foto dei suoi genitori, Bobo trova un'obbligazione acquistata anni prima dal babbo, di valore facciale 1000€, remunerata con cedole annuali del 20%, con vita residua 3 anni e 2 mesi. Un amico di Bubi -un giapponese biondo di nome BoBan- propone a Bobo l'acquisto dell'obbligazione per 1200€. Bobo usa un tasso di valutazione del 10%, pertanto pensa: "...il titolo dura ancora 3 anni e rotti, quindi incasserò 3 cedole e il valore facciale, cioè 1600€, che scontati al 10% su 38 mesi diventano 1183.16€..." e accetta l'offerta di BoBan. Sapendo che:

[1] O meglio, le scelte degli alleli sono indipendenti.

- queste obbligazioni vengono rimborsate progressivamente in maniera uniforme;
- l'obbligazione trovata da Bobo non è stata ancora rimborsata;

determinare:

(a) la probabilità che il rimborso avvenga esattamente tra 2 mesi;

(b) il valore al tempo 0 del titolo con il criterio del valor medio, usando un tasso di valutazione del 10% annuo;

(c) i 2 errori nel ragionamento di Bobo.

Svolgimento. L'obbligazione trovata da Bobo fornisce cedole di 200 l'una (il 20% di 1000 è 200), e verrà rimborsata tra 2 mesi, 1 anno e 2 mesi, 2 anni e 2 mesi o 3 anni e 2 mesi con probabilità $\frac{1}{4}$ (questo è il significato di "rimborso progressivo uniforme"). La variabile aleatoria "rimborso tra due mesi" è quindi $\{(1200, \frac{1}{4}), (200, \frac{3}{4})\}$, mentre quella "rimborso tra un anno e due mesi" è $\{(1200, \frac{1}{4}), (0, \frac{1}{4}), (200, \frac{2}{4})\}$ e così via. Il grafico di evoluzione temporale dell'obbligazione è allora:

	$\{(1200,\frac{1}{4}),(200,\frac{3}{4})\}$	$\{(1200,\frac{1}{4}),(0,\frac{1}{4}),(200,\frac{2}{4})\}$	$\{(1200,\frac{1}{4}),(0,\frac{2}{4}),(200,\frac{1}{4})\}$	$\{(1200,\frac{1}{4}),(0,\frac{3}{4})\}$
0	1/6	7/6	13/6	19/6

dove abbiamo scelto di rappresentare il tempo in anni (e dunque due mesi sono 1/6 di anno) in quanto tutte le quantità sono annuali! Fatto questo, le prime due risposte sono immediate: (a) è $\frac{1}{4}$, mentre per (b) calcoliamo i valori medi delle variabili aleatorie e otteniamo:

	450	400	350	300
0	1/6	7/6	13/6	19/6

Usando come detto nel testo il fattore di sconto $\nu = \frac{1}{1.1}$, il valore al tempo 0 viene:

$$450\nu^{1/6} + 400\nu^{7/6} + 350\nu^{13/6} + 300\nu^{19/6} \cong 1307.35$$

Per quanto riguarda gli errori di Bobo, bisogna per prima cosa capire che ragionamento ha fatto! Il suo pensiero è: "...il titolo dura ancora 3 anni e rotti, quindi incasserò 3 cedole [...]" -primo errore, le cedole sono 4, non 3! Poi pensa: "[...] e il valore facciale, cioè 1600€[...]" -secondo errore, se anche ci fossero 3 cedole da 200 l'una (notare che Bobo sta diventando bravo, ha saputo calcolare bene il 20% di 1000) non si possono sommare quantità presenti a tempi differenti senza prima scontare opportunamente! È un errore gravissimo! Infine Bobo dice: "[...] che scontati al 10% su 38 mesi diventano 1183.16€...", e questo conto è giusto.

Bobo ha fatto anche un terzo errore: invece di applicare il criterio del valor medio, ha risolto l'incertezza assumendo che l'obbligazione venga rimborsata per ultima! ■

3. Sempre nei ricordi di famiglia, Bobo trova uno scambio di lettere tra i suoi genitori nel quale entrambi appaiono desiderare per Bobo una carriera da astronauta! Bobo decide pertanto di iscriversi a un master in "astronautologia", che gli costerà subito 5000€, e altri 5000€ tra 2 anni. Questo master, se frequentato con successo, gli garantirà, a partire dal prossimo anno, 4 rimborsi spese annuali di 3000€ ciascuno per la partecipazione a un tirocinio.

   (a) Dire se esiste, e nel caso calcolare al meglio di 2 cifre decimali, il TIR di questa operazione finanziaria.

   (b) Assumendo che Bobo possieda al tempo 0 solo 1200€, e che sia possibile investire e prendere denaro in prestito al 15%, calcolare il REA al 15%.

   (c) Si poteva capire il segno del REA del punto precedente senza fare calcoli?

Svolgimento. Solita evoluzione temporale dell'operazione finanziaria che Bobo sta per affrontare:

		3000		
-5000	3000	-5000	3000	3000
0	1	2	3	4

Per rispondere ad (a), usiamo Norström: le somme parziali $\{-5000, -2000, -4000, -1000, 2000\}$ hanno primo termine negativo, ultimo termine positivo, e cambiano segno una volta sola! Quindi il TIR esiste (e Norström ci dice anche che è positivo). Per calcolarlo dobbiamo risolvere l'equazione nell'incognita ν $\text{REA}(\nu) = 0$, che scritta esplicitamente è:

$$-5000 + 3000\nu - 2000\nu^2 + 3000\nu^3 + 3000\nu^4 = 0.$$

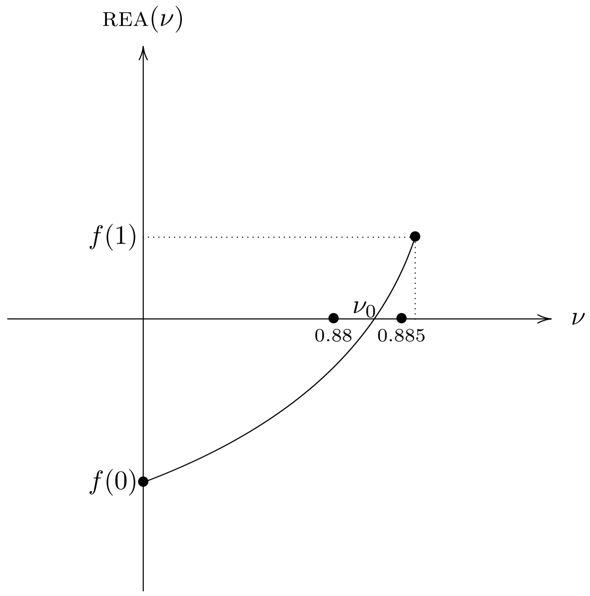

Figura 1: Grafico approssimativo della funzione $\text{REA}(\nu)$.

Dopo opportuna semplificazione l'equazione diventa

$$-5 + 3\nu - 2\nu^2 + 3\nu^3 + 3\nu^4 = 0,$$

ed è chiaro che tale equazione non è risolvibile in maniera esatta, almeno a prima vista. Usiamo quindi il metodo della bisezione, che fornisce una soluzione ν_0 con l'approssimazione che meglio crediamo. Detto $f(\nu)$ il polinomio $-5 + 3\nu - 2\nu^2 + 3\nu^3 + 3\nu^4$, abbiamo $f(0) < 0$ e $f(1) > 0$. Il calcolo di $f(\nu)$ per $\nu = 0.88$ e $\nu = 0.89$ fornisce $\nu_0 \in [0.88, 0.89]$, e volendo decidere se approssimare per eccesso o per difetto calcoliamo anche $f(0.885) > 0$, da cui $\nu_0 \cong 0.88$ (vedi figura 1) e finalmente $i = \frac{1}{\nu_0} - 1 \cong 0.14$.

Il punto (b) è ingannevole: apparentemente richiede di calcolare il REA al 15% con una normalizzazione finanziaria dovuta al fatto che Bobo non possiede il capitale necessario per iscriversi al master, e quindi dovrà prendere in prestito quel che gli manca. Inoltre, il fatto che venga dato un tasso di investimento porta a pensare di dover investire le entrate dell'operazione finanziaria man mano che queste si presentano. Facciamo quello che abbiamo appena detto, aggiungendo al grafico di prima anche il prestito al tempo 0 di 3800 (Bobo aveva di suo solo 1200, e il master costa 5000), l'investimento al tempo 1 di 3000, il ritiro al tempo 2 di parte del montante di quanto investito al tempo 1 per pagare gli altri 5000 richiesti, e così via. Indicando con i_f e i_r i tassi rispettivamente di finanziamento e reinvestimento, abbiamo:

		$-(3000(1+i_r) - 2000)$		$3000(1+i_r)$
		$3000(1+i_r) - 2000$		$(3000(1+i_r) - 2000)(1+i_r)^2$
3800	-3000	2000	-3000	$-3800(1+i_f)^4$
-5000	3000	-2000	3000	3000
0	1	2	3	4

Più facile dirlo che scriverlo: a ogni scadenza non voglio avere soldi inutilizzati, quindi investo al tasso i_r tutto quel che entra, e se devo pagare qualcosa lo prelevo dai soldi che ho investito alla scadenza precedente. Alla fine pago i debiti che ho dovuto contrarre nel corso dell'operazione finanziaria al tasso i_f (in questo caso solo i 3800 che abbiamo preso in prestito all'inizio). Quindi a ogni scadenza avremo 0, e l'operazione finanziaria diventa:

-1200	0	0	0	K
0	1	2	3	4

dove ho indicato con K la somma di tutte le entrate e uscite al tempo 4:

$$K = -3800(1+i_f)^4 + 3000(1+i_r)^3 - 2000(1+i_r)^2 + 3000(1+i_r) + 3000.$$

Il valore attuale al tasso i_v è allora:

$$\text{REA}(i_v) = \frac{-3800(1+i_f)^4 + 3000(1+i_r)^3 - 2000(1+i_r)^2 + 3000(1+i_r) + 3000}{(1+i_v)^4} - 1200$$

È chiaro allora che *se i_f, i_r e i_v sono gli stessi* tutto quel che abbiamo fatto è stato inutile: capitalizzare al tasso i_r o i_f per poi scontare al tasso i_v significa non fare nulla, quando tutti i tassi sono uguali! Formalmente, denotando il tasso comune del 15% con i:

$$\begin{aligned}
\text{REA}(i) &= \frac{-3800(1+i)^4 + 3000(1+i)^3 - 2000(1+i)^2 + 3000(1+i) + 3000}{(1+i)^4} - 1200 \\
&= -3800 + \frac{3000}{1+i} - \frac{2000}{(1+i)^2} + \frac{3000}{(1+i)^3} + \frac{3000}{(1+i)^4} - 1200 \\
&= -5000 + \frac{3000}{1+i} - \frac{2000}{(1+i)^2} + \frac{3000}{(1+i)^3} + \frac{3000}{(1+i)^4} \cong -215.783
\end{aligned}$$

e quest'ultimo è proprio il REA che avrei ottenuto direttamente se non avessi fatto alcuna normalizzazione! Questo esercizio insegna dunque che

se i tassi di finanziamento, reinvestimento e valutazione coincidono, non serve alcuna normalizzazione!

Per concludere, il punto (c): certo che potevamo capire il segno del REA! Calcolare il REA al 15% significa confrontare l'operazione finanziaria con l'ipotesi alternativa di investire i propri capitali al 15%. Ma abbiamo calcolato che l'operazione finanziaria rende il 14%, quindi non è conveniente rispetto a un investimento al 15%: il REA deve pertanto rifiutarla, cioè deve venire negativo! ■

4. Solo corso da 6 crediti

Bobo non supera neanche gli esami del primo anno del master. Dovendo quindi far fronte a vari debiti[2], decide di fare quello che in fondo è il suo mestiere: investire in borsa su titoli rischiosi, e in quanto tali altamente redditizi! Constatato che il tasso privo di rischio è del 5% mensile, Bobo trova una call europea con prezzo d'esercizio 95 e scadenza tra 1 mese, e viene a sapere da fonti certe che il prezzo del sottostante, che ora è 100€, nel prossimo mese potrà solo salire del 10% con probabilità 0.9, o scendere del 10% con probabilità 0.1. Bobo (che evidentemente non ha mai sentito parlare di modello binomiale) pensa: "...questa call mi darà tra 1 mese 15€ con probabilità 0.9, quindi tra 1 mese varrà 13.5€, e pertanto adesso vale 12.86€...". Accetta quindi l'offerta di BoBan, che gentilmente gliele vende al prezzo di 12€ l'una.

(a) Calcolare il valore della call con l'ipotesi di non-arbitraggio.
(b) Determinare la composizione in azioni e soldi di un portafoglio capace di replicare la call a scadenza.
(c) Determinare una strategia d'arbitraggio per BoBan.
(d) Determinare quante call BoBan deve vendere a Bobo per guadagnare esattamente $\frac{9000}{7}$€.
(e) Spiegare il ragionamento di Bobo e trovare l'errore.

Svolgimento. Le domande (a), (b) e (c) sono tutte collegate tra loro: il valore della call è univocamente determinato dall'esigenza di avere un mercato coerente (cioè privo di possibilità di arbitraggio), e nel caso questo non accada (ovvero, se per caso il prezzo proposto da BoBan non è quello giusto!) è possibile comprare e vendere lo stesso prodotto sotto forme diverse -la call e il portafoglio replicante-, ovviamente comprando quello che costa meno e vendendo quello che costa di più. Fatta questa premessa, osserviamo che visto che BoBan vende la call al prezzo di 12, e visto il testo della domanda (c), possiamo inferire che il prezzo della call calcolato affiché non ci sia arbitraggio verrà minore di 12, e BoBan potrà diventare ricco comprando il portafoglio replicante che poi a scadenza userà come se fosse una call!

Dalla teoria conosciamo due metodi per il calcolo del valore di una call europea con sottostante che non fornisce dividendi: valor medio neutrale al rischio attualizzato e valore al tempo 0 del portafoglio replicante. A scopo didattico, usiamo entrambi i metodi.

Metodo 1: mondo neutrale al rischio. Sappiamo che il criterio del valor medio (quello che usa Bobo) non si può usare nella valutazione dei titoli derivati, perché fornisce un prezzo sbagliato (dove sbagliato significa che genera possibilità di arbitraggio). C'è però un'eccezione: se usiamo delle probabilità particolari, dette *neutrali al rischio*, questo metodo funziona! Detti u e d i fattori moltiplicativi di evoluzione del prezzo del sottostante, ed r il fattore di rendimento privo di rischio, le probabilità neutrali al rischio π e ρ sono date da

$$\pi = \frac{r-d}{u-d} \qquad \rho = \frac{u-r}{u-d}$$

Particolarizzando al nostro esercizio, otteniamo $u = 1.1$ (aumentare un prezzo del 10% vuol dire moltiplicare quel prezzo per 1.1), $d = 0.9$ (diminuire un prezzo del 10% vuol dire moltiplicare quel prezzo per 0.9), e $r = 1 + 0.05 = 1.05$. Controlliamo che le unità di misura dei tempi siano tutte coerenti tra loro -lo sono: il

[2] Il finanziamento di 3800€ chiesto per iscriversi al master, gli oltre 30000€ che deve pagare per le fragole comprate nell'esonero scorso, le spese per il figlio Bebe...

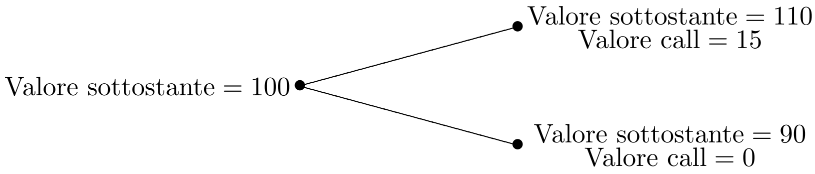

Figura 2: Valori call/sottostante su un albero ad uno stadio.

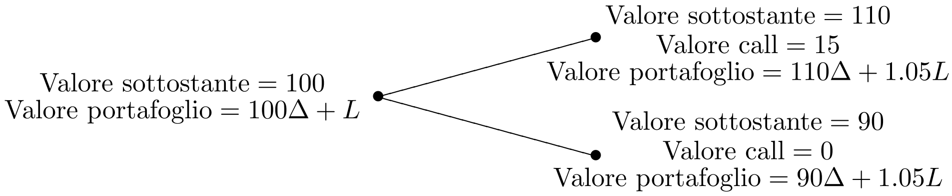

Figura 3: Valori call/sottostante su un albero ad uno stadio.

tasso privo di rischio è mensile, e l'evoluzione binomiale del sottostante è data mensilmente- e andiamo avanti. Otteniamo le probabilità neutrali al rischio

$$\pi = \frac{r-d}{u-d} = \frac{3}{4} \qquad \rho = \frac{u-r}{u-d} = \frac{1}{4}$$

che dobbiamo usare per calcolare il valor medio del payoff della call. Quant'è il payoff della call? Se il prezzo del sottostante sale del 10%, diventerà 110, e il possessore della call potrà avere ciò che vale 110 al prezzo di 95, guadagnandoci 15. Se il prezzo del sottostante scende del 10%, diventerà 90, e il possessore della call non comprerà a 95 ciò che potrebbe avere a 90: pertanto il valore della call sarà 0! Tutto questo si sintetizza in genere nel grafico "ad albero" in figura 2.

Il criterio del valor medio *valido solo se usiamo le probabilità neutrali al rischio* dice che possiamo calcolare il valore dell'opzione semplicemente come valor medio dei suoi payoff (15 con probabilità $\frac{3}{4}$ e 0 con probabilità $\frac{1}{4}$), dunque:

$$\text{valor medio call tra 1 mese} = 15\frac{3}{4} + 0\frac{1}{4} = \frac{45}{4}$$

Poiché noi vogliamo il valore della call ora, e non tra un mese, dobbiamo attualizzare al tasso privo di rischio:

$$\text{valore call al tempo } 0 = \frac{45}{4}\frac{1}{1.05} = \frac{45}{4}\frac{20}{21} = \frac{45 \cdot 5}{21} = \frac{75}{7}$$

Prima di andare avanti, osserviamo che la domanda (d) chiede di calcolare quante call deve vendere BoBan per guadagnare $\frac{9000}{7}$: quindi siamo ben felici di avere trovato un prezzo per la call con 7 al denominatore, e ci guardiamo bene dall'eseguire la divisione!

Dunque il prezzo giusto per la call è $\frac{75}{7}$, chiaramente minore del prezzo offerto da BoBan $\frac{84}{7} = 12$. Ogni call venduta da BoBan a Bobo frutterà a BoBan $\frac{84-75}{7} = \frac{9}{7}$, e quindi la risposta alla domanda (d) è 1000.

Il metodo 2 per calcolare il valore della call è la costruzione di un portafoglio replicante, cioè di un portafoglio di azioni e contante che al tempo finale sia equivalente alla call. Diciamo Δ il numero di azioni contenute in questo portafoglio, e L il contante. Il portafoglio al tempo 0 vale $100\Delta + L$, mentre il suo valore al tempo 1 dipende da cosa succede al sottostante: se l'azione sarà salita, il portafoglio varrà $110\Delta + 1.05L$, mentre nel caso in cui l'azione sarà scesa, il portafoglio varrà $90\Delta + 1.05L$. Analogamente, la call varrà 15 o 0. Questo si sintetizza ancora con un grafico ad albero (figura 3).

Richiedere che il portafoglio replichi la call a scadenza significa richiedere che il valore del portafoglio a scadenza sia 15 o 0 se l'azione è salita o scesa, e questo significa richiedere che il seguente sistema sia soddisfatto:

$$\begin{cases} 110\Delta + 1.05L = 15 \\ 90\Delta + 1.05L = 0 \end{cases}$$

Il determinante del sistema è $1.05(110-90) \neq 0$, quindi abbiamo un'unica soluzione (Δ, L), corrispondente ad un'unica composizione di portafoglio. Risolviamo il sistema con il metodo che più ci aggrada (qui uso Cramer):

$$\begin{cases} \Delta = \dfrac{\begin{vmatrix} 15 & 1.05 \\ 0 & 1.05 \end{vmatrix}}{20 \cdot 1.05} = \dfrac{3}{4} \\[2ex] L = \dfrac{\begin{vmatrix} 110 & 15 \\ 90 & 0 \end{vmatrix}}{20 \cdot 1.05} = -\dfrac{90 \cdot 15}{20 \cdot 1.05} = -\dfrac{450}{7} \end{cases}$$

da cui il valore in 0 del portafoglio (che deve essere il valore in 0 della call, visto che a scadenza sono equivalenti!):

$$\text{valore portafoglio in } 0 = 100\frac{3}{4} - \frac{450}{7} = 75 - \frac{450}{7} = \frac{525-450}{7} = \frac{75}{7}$$

che è proprio il valore della call trovato con le probabilità neutrali al rischio!

Ricapitoliamo cosa abbiamo fatto. Abbiamo trovato il valore della call in 0 con due metodi (domanda (a)) e il secondo metodo ha comportato la costruzione di un portafoglio replicante (domanda (b)). Nel frattempo abbiamo osservato che ciascuna call del valore di $\frac{75}{7}$ venduta a 12 comporta per il venditore un guadagno di $12 - \frac{75}{7}$, e con questa informazione abbiamo dato la risposta alla domanda (d). Rimane la domanda (c), alla quale abbiamo risposto parzialmente: l'arbitraggio richiesto è vendita call-acquisto portafoglio, che si sintetizza in genere con il seguente grafico di evoluzione temporale (indichiamo con $C(\cdot)$ e $P(\cdot)$ il valore della call e del portafoglio rispettivamente):

$C(0) = 12$ — $-C(1) = \{(-15, 0.9), (0, 0.1)\}$ — vendita call

0 — 1

$-P(0) = -(100\Delta + L) = -75 + \frac{450}{7} = -\frac{75}{7}$ — $P(1) = \{(15, 0.9), (0, 0.1)\}$ — acquisto portafoglio

0 — 1

$C(0) - P(0) = 12 - \frac{75}{7} = \frac{9}{7}$ — $P(1) - C(1) = 0$ — totale

0 — 1

Infine, la domanda (e): cosa ha pensato Bobo? Ha usato il criterio del valor medio con le probabilità soggettive che gli erano state date (0.9 e 0.1), e questo metodo non funziona mai a meno che le probabilità scelte non siano proprio quelle neutrali al rischio! ■

5. $\boxed{\text{Solo corso da 7 crediti}}$ Bobo non supera neanche gli esami del primo anno del master. Dovendo quindi far fronte a vari debiti[3], decide di fare quello che in fondo è il suo mestiere: investire in borsa su titoli rischiosi, e in quanto tali altamente redditizi! Constatato che il tasso privo di rischio è del 5% mensile, Bobo trova una call europea con prezzo d'esercizio 110 e scadenza tra 3 mesi, e viene a sapere da fonti certe che il prezzo del sottostante, che ora è 100€, nei prossimi 3 mesi potrà ogni mese solo salire del 10% con probabilità 0.9, o scendere del 10% con probabilità 0.1. Bobo (che evidentemente non ha mai sentito parlare di modello binomiale) pensa: "...questa call tra 3 mesi mi darà mediamente 16.84€, e pertanto adesso vale 14.55€...". Accetta quindi l'offerta di BoBan, che gentilmente gliele vende al prezzo di 14€ l'una.

   (a) Calcolare il valore della call con l'ipotesi di non-arbitraggio (formula di Cox-Ross-Rubinstein).
   (b) Descrivere nel modo più chiaro possibile un portafoglio dinamico composto da azioni e soldi capace di replicare la call a scadenza.
   (c) Dire quanto guadagna BoBan per ogni call venduta a Bobo.
   (d) Spiegare il ragionamento di Bobo, trovare l'errore, e dire in quale caso il suo ragionamento avrebbe prodotto il risultato corretto per $C(0)$.

Svolgimento. Questo esercizio è una versione più elaborata del precedente: si usano le stesse tecniche sui singoli periodi, che in questo caso sono 3. Per capire questo svolgimento, è necessario prima aver capito lo svolgimento dell'esercizio precedente!

Come prima cosa, disegniamo il grafo (vedi figura 4) contenente sottostante e call, e denotiamo per maggiore chiarezza il valore del sottostante e della call rispettivamente con $A(\cdot)$ e $C(\cdot)$. L'esercizio chiede essenzialmente di trovare tutti i punti interrogativi. Una prima osservazione che facciamo è che alcuni di questi punti interrogativi sono 0, visto che comunque vada a partire da li si otterrà 0 come valore finale della call: otteniamo perciò la figura 5.

La domanda (a) richiede l'utilizzo della formula di Cox-Ross-Rubinstein:

$$\begin{aligned} C(0) &= \frac{1}{r^n}\sum_{j=0}^{n} C_{u^{n-j}d^j}\binom{n}{j}\pi^{n-j}\rho^j \\ &= \frac{1}{1.05^3}\left(C_{u^3}\binom{3}{0}\pi^3 + C_{u^2d}\binom{3}{1}\pi^2\rho + C_{ud^2}\binom{3}{2}\pi\rho^2 + C_{d^3}\binom{3}{3}\rho^3\right) \\ &= \frac{1}{1.05^3}\cdot 23.1 \cdot \frac{3^3}{4^3} \cong 8.42 \end{aligned}$$

[3] Il finanziamento di 3800€ chiesto per iscriversi al master, gli oltre 30000€ che deve pagare per le fragole comprate nell'esonero scorso, le spese per il figlio Bebe...

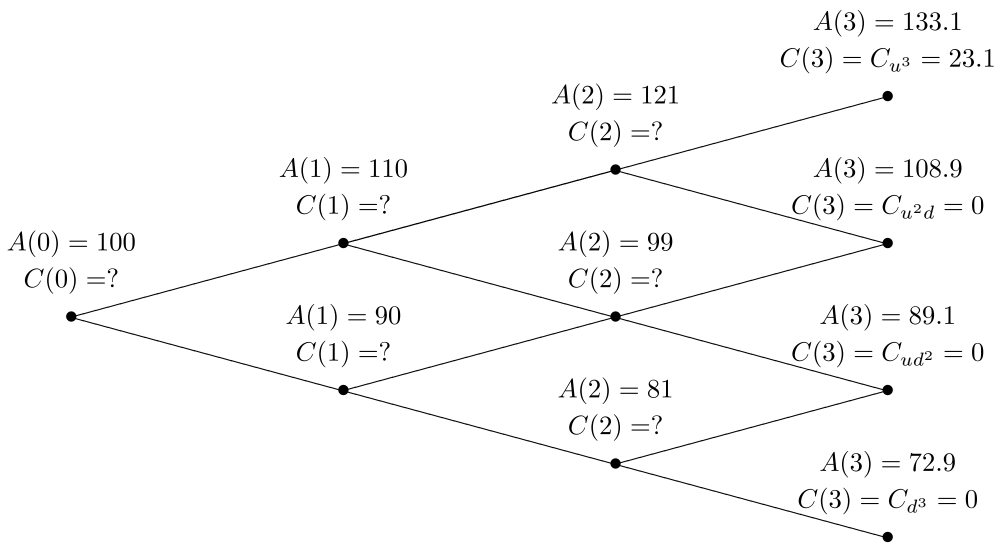

Figura 4: Valori call/sottostante su 3 periodi.

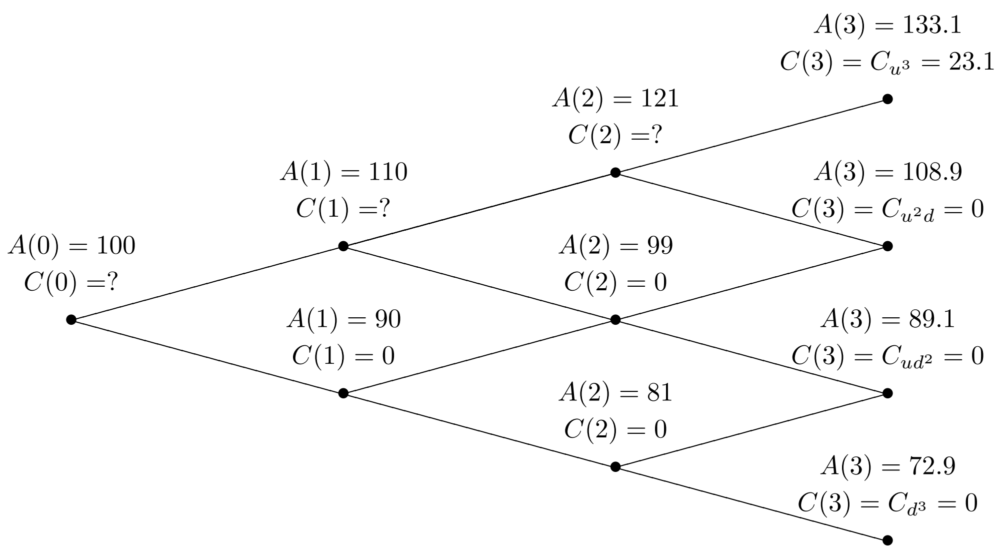

Figura 5: Valori call/sottostante su 3 periodi, riempita con i valori evidenti.

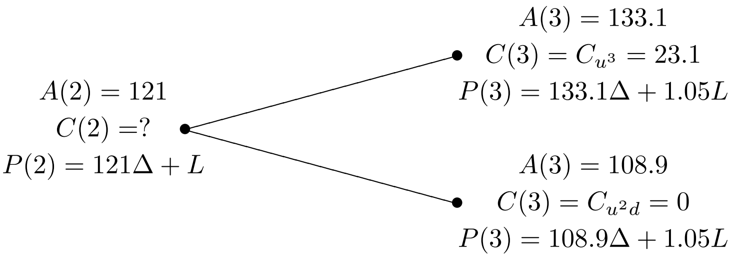

Figura 6: Sottografo 1 della figura 5.

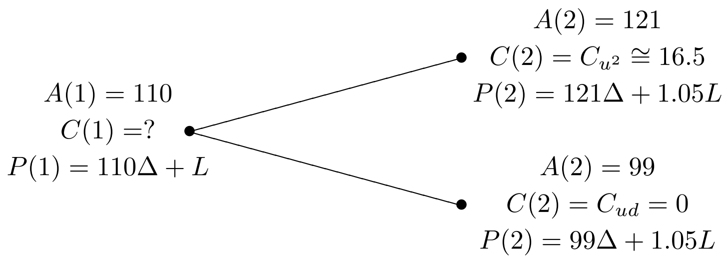

Figura 7: Sottografo 2 della figura 5.

La domanda (b) richiede il calcolo delle coppie (Δ, L) alle scadenze 0, 1 e 2, ovvero richiede di applicare quanto fatto nell'esercizio precedente al sottografo dato in figura 6:

Per trovare C_{u^2} dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 133.1\Delta + 1.05L = 23.1 \\ 108.9\Delta + 1.05L = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \Delta \cong 0.954545 \\ L \cong -99 \end{cases}$$

e corrispondentemente $C_{u^2} \cong 0.954545 \cdot 121 - 99 \cong 16.5$. Il sistema successivo sarà allora associato al sottografo dato in figura 7 da cui

$$\begin{cases} 121\Delta + 1.05L = 16.5 \\ 99\Delta + 1.05L = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \Delta \cong 0.75 \\ L \cong -70.7143 \end{cases} \Longleftrightarrow C(1) = C_u \cong 0.75 \cdot 110 - 70.7143 = 11.7857$$

Infine, abbiamo la figura 8 da cui

$$\begin{cases} 110\Delta + 1.05L = 11.7857 \\ 90\Delta + 1.05L = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \Delta \cong 0.589285 \\ L \cong -50.5101 \end{cases} \Longleftrightarrow C(0) \cong 0.589285 \cdot 100 - 50.5101 \cong 8.42$$

che è lo stesso valore dato dalla formula di Cox-Ross-Rubinstein! La descrizione del portafoglio dinamico replicante della call è dunque la seguente: al tempo 0 acquisto 0.589285 azioni e prendo in prestito 50.5101. Al tempo 1, se l'azione è salita compro altre $0.75 - 0.589285 = 0.160715$ azioni, e per questo devo prendere in prestito altri $0.160715 \cdot 110 = 17.6787$, portando così l'ammontare del debito a $50.5101 \cdot 1.05 + 17.6787 = 70.7143$ (che guarda caso è proprio il valore di L al periodo 1!). Se l'azione al tempo 1 è scesa, liquido il portafoglio: ovvero, vendo le azioni a 90 l'una, ottenendo $90 \cdot 0.589285 = 53.0357$, e pago il debito di $50.5101 \cdot 1.05 = 53.0357$, rimanendo in pari (infatti in questo caso la call vale 0). Al tempo 2, se l'azione è ancora salita, compro ancora $0.954545 - 0.75 = 0.204545$ azioni, spendendo $121 \cdot 0.204545 = 24.75$ portando così l'ammontare del debito a $70.7143 + 24.75 = 95.4643$. Se al tempo 3 l'azione è ancora salita, liquido il portafoglio e ottengo $0.954545 \cdot 133.1 = 127.05$ dalla vendita delle azioni, e devo restituire $50.5101 \cdot 1.05^3 + 17.6787 \cdot 1.05^2 + 24.75 \cdot 1.05 = 103.95$, ottenendo infine $127.05 - 103.95 = 23.1$, che è esattamente il payoff della call nel caso u^3.

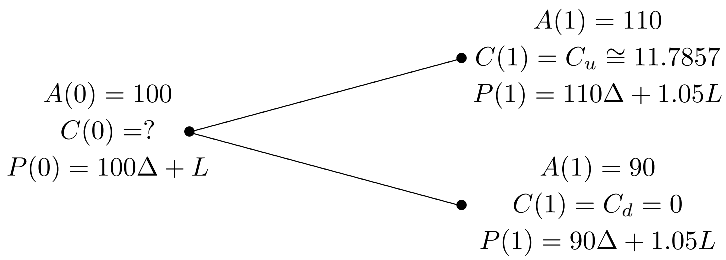

Figura 8: Sottografo 3 della figura 5.

Per quanto riguarda (c), BoBan vende a 14 qualcosa che vale 8.42, quindi guadagna per ciascuna di queste transazioni $14 - 8.42 = 5.58$.

Per ultimo, il ragionamento di Bobo: evidentemente ha applicato il criterio del valor medio con le probabilità assegnate nel testo. L'unico caso in cui avrebbe avuto il risultato corretto sarebbe stato nel caso in cui le probabilità assegnate avessero coinciso con le probabilità neutrali al rischio.

■